IL COMMENTO

Carlo Felice Manara - Mario Marchi

1. La gestazione dei nuovi programmi d'insegnamento per il primo biennio delle scuole medie superiori è stata, come è noto, abbastanza laboriosa.
È noto che le recenti vicende politiche, collegate con la fine della legislatura, hanno interrotto i lavori parlamentari diretti alla riforma della nostra scuola secondaria superiore; la storia recente del nostro Paese ha visto più volte un episodio analogo, tanto da provocare umoristiche considerazioni a proposito della nefasta influenza che i progetti di riforma della scuola avrebbero (a dire di alcuni) sulla vita delle Camere. Si potrebbe comunque osservare che i nostri parlamentari hanno dedicato a questi argomenti una notevole e lodevole dose di ponderazione; il che ha forse protratto i lavori, facendo passare avanti altri argomenti i quali, nelle menti dei legislatori, sono ovviamente considerati più urgenti ed importanti di quelli riguardanti la scuola.
Tralasciando ogni giudizio su questi e su altri argomenti, pensiamo sia comunque utile profittare di questa che molti chiamano «pausa di riflessione» per rimeditare il testo approvato dalla Commissione Brocca per i nuovi programmi di matematica ed informatica dei primi due anni delle scuole secondarie superiori.

2. A questo proposito vorremmo anzitutto ripetere una osservazione preliminare, anche se siamo ben consci del fatto che ogni nostra parola in proposito sarà certamente disattesa; l'osservazione riguarda il noto accoppiamento tra matematica ed informatica, accoppiamento sul quale ripetiamo il nostro disaccordo, fondato su varie ragioni; la più importante tra queste potrebbe essere esposta dicendo che, a nostro parere, l'insegnamento della matematica dovrebbe avere un carattere essenzialmente formativo della mente dell'adolescente. A questo scopo pensiamo che sia utile presentare la matematica come una chiave di lettura della realtà, cioè come un insieme di strutture teoriche destinate a fondare ed a fare da supporto ad una visione razionale della esperienza. Visione che tuttavia non dovrebbe invadere tutto il quadro conoscitivo, rischiando di presentare la matematizzazione come la sola strada efficace per la conoscenza scientifica.
Sotto questa luce, ed in questo ordine di idee, pensiamo che l'informatica abbia un valore formativo ad un livello molto inferiore; e manteniamo il parere che la cosiddetta «informatizzazione», nel modo in cui è stata realizzata, abbia avuto l'aspetto più di una moda didattica che di un vero progresso per la scuola italiana.

3. In altre occasioni sono state avanzate alcune riserve a proposito di bozze di programmi che presentavano come scopo della matematica la risoluzione dei problemi, ed in qualche modo imponevano che l'insegnamento della materia fosse fatto «per problemi». L'atteggiamento del testo attuale di programmi appare relativamente più rispettoso della libertà didattica degli insegnanti, e meno restrittivo nella concezione della matematica. Infatti i programmi si limitano a presentare gli «obiettivi di apprendimento» (cfr. pag. 21).
Ritorneremo nel seguito su alcuni degli argomenti che stimiamo particolarmente importanti; qui ci limitiamo ad esporre le nostre perplessità a proposito di un elenco di obiettivi da conseguire piuttosto che di concetti da acquisire: noi pensiamo infatti che questi ultimi siano i fondamenti delle capacità e delle abilità che vengono elencate tra gli obiettivi, mentre il semplice elenco di questi può indurre a valutare l'azione dell'insegnamento in base alle sole capacità di operare che eventualmente siano state acquisite in seguito ad un insegnamento puramente addestrativo.
A questo proposito ricordiamo ciò che avveniva qualche tempo addietro con i vecchi programmi di liceo scientifico; poiché, per tradizione pluriennale, l'argomento della prova scritta di maturità era la discussione di un'equazione quadratica i cui coefficienti contenevano un parametro reale, la preparazione di molti soggetti al superamento dell'esame scritto si limitava all'addestramento all'impiego di metodi codificati di discussione; metodi che erano giunti a tale livello di raffinamento e di specializzazione che potevano venire memorizzati ed applicati anche da soggetti che possedevano soltanto il maneggio materiale dei mezzi di calcolo algebrico, ed erano spesso ben lontani dal comprendere il significato, i fondamenti e la portata degli strumenti che applicavano con tanta sicurezza e tanto zelo.

4. Dopo di aver elencato gli obiettivi, i programmi enunciano una «Articolazione dei contenuti», secondo i seguenti Temi: 1) Geometria del piano e dello spazio. 2) Insiemi numerici e calcolo. 3) Relazioni e funzioni. 4) Elementi di probabilità e statistica. 5) Elementi di logica e di informatica.

Lo spazio ridotto ci impedisce di svolgere qui un'analisi minuta ed approfondita di tutti questi Temi, del modo in cui essi vengono proposti e delle difficoltà didattiche che si dovrebbero affrontare, qualora si volesse svolgerli in modo serio, cioè formativo per gli allievi. Ci limiteremo quindi ad aggiungere qualche osservazione a quelle che abbiamo già formulato poco fa.
Da un punto di vista generale, vorremmo osservare che i contenuti dei singoli temi sono presentati in forma molto sommaria, e che mancano quindi le precisazioni minute che si potevano leggere nei primi progetti di programma, precisazioni che a volte imponevano una determinata concezione della matematica (che poteva non essere universalmente condivisa) ed un insieme di linee didattiche a volte strettamente collegate con quella concezione e quindi spesso largamente e legittimamente opinabili.
Per esempio, nel Tema «Geometria del piano e dello spazio» sono elencati tre argomenti: 1.1) Piano euclideo e sue trasformazioni isometriche. Figure e loro proprietà. Poligoni equiscomponibili; teorema di Pitagora. 1.2) Piano cartesiano: retta. 1.3) Esempi significativi di trasformazioni nello spazio. Individuazione di simmetrie in particolari solidi geometrici.
Ci pare legittimo pensare che le «trasformazioni isometriche» di cui si parla siano da collegare con l'obiettivo 1), secondo il quale lo studente «deve essere in grado di individuare proprietà invarianti per trasformazioni elementari».
Il punto 2) parla di «Piano cartesiano» e le avvertenze che seguono gli enunciati dei vari punti precisano: «Un traguardo importante dello studio della geometria sarà il piano cartesiano, come modello del piano euclideo». Crediamo che sia comprensibile qualche lieve perplessità nell'interpretazione di queste parole, e soprattutto nell'interpretazione del termine «modello»; ci chiediamo infatti se con questo termine si intenda indicare un insieme di concetti, collegati tra loro da una strutturazione teorica, i quali soddisfano ad una parte od a tutti gli assiomi di una data teoria; questo atteggiamento, se non andiamo errati, è stato assunto da D. Hilbert il quale, nei suoi *Grundlagen*, assume i concetti e i teoremi del campo complesso per verificare la compatibilità degli assiomi da lui enunciati nel I gruppo. Oppure se col termine si intenda indicare un certo insieme di oggetti materiali, o di nostre manipolazioni su di essi, che costituiscono i «contenuti» degli assiomi di una certa teoria. Tale ci pare per esempio l'atteggiamento di chi vorrebbe fondare il concetto di probabilità sull'insieme di manipolazioni che noi eseguiamo su certi sistemi fisici: urne, dadi, monete ecc.
Ma non ci pare questo l'intento di coloro che hanno proceduto alla stesura dei programmi: probabilmente si voleva soltanto suggerire l'insegnamento delle convenzioni della abituale geometria analitica per tradurre le proprietà degli enti della geometria (supposte già note) con gli strumenti dell'algebra e dell'analisi matematica, con la raccomandazione di rilevare i parallelismi e le differenze tra le procedure geometriche (che utilizzano espressioni del linguaggio comune per rappresentare gli enti geometrici e svolgere le deduzioni), e le procedure che utilizzano per gli stessi scopi le convenzioni abituali della geometria analitica, il linguaggio e la sintassi dell'algebra dei numeri reali.
Questa nostra interpretazione ci pare confortata dalla parola «retta», che vorrebbe forse indicare, in forma tacitiana, la prescrizione di limitare le considerazioni all'impiego della geometria analitica per rappresentare la retta nel piano e per risolvere i corrispondenti problemi. Analoghe perplessità generano le frasi seguenti, dedicate alla geometria dello spazio:
«Gli elementi di geometria dello spazio hanno lo scopo di alimentare e sviluppare l'intuizione spaziale». In questo caso il termine «intuizione» vuole forse avere il significato di «immaginazione». Ma, in questo ordine di idee, riteniamo che l'immaginazione non sia sufficiente per una deduzione rigorosa e pensiamo che occorra invece fare della geometria dello spazio un contenuto insostituibile per l'allenamento alla concettualizzazione e alla deduzione rigorosa. L'urgenza di quest'opera ci pare dimostrata abbondantemente dal grande numero di studenti universitari di Facoltà cosiddette «scientifiche» che ignorano quasi totalmente ogni ragionamento geometrico spaziale; ed un'ulteriore conferma si ha dal censimento del grandissimo numero di testi di matematica che ostentano figure geometriche clamorosamente errate, in relazione a problemi di geometria spaziale.

5. Il Tema 2 viene sviluppato con i seguenti sottotitoli: 2.1) Operazioni, ordinamento e loro proprietà negli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali. 2.2) Valori approssimati e loro uso nei calcoli elementari. Introduzione intuitiva dei numeri reali. 2.3) Il linguaggio dell'algebra e il calcolo letterale: monomi, polinomi, frazioni algebriche. 2.4) Equazioni, disequazioni e sistemi di primo grado.
Le avvertenze precisano che «Il numero reale sarà introdotto in via intuitiva, come processo costruttivo che può nascere sia da esigenze di calcolo numerico, sia da un confronto tra grandezze omogenee». E si prosegue raccomandando di presentare esempi di calcolo approssimato «... al fine di far vedere come il risultato del calcolo possa essere illusorio in assenza di una corretta valutazione dell'errore». Speriamo che gli insegnanti sappiano scegliere queste linee di condotta che dovrebbero sempre essere tenute presenti, in un'epoca in cui il computer è troppo spesso trattato come un feticcio ed i suo responsi sono adottati come verità rivelata.
Le avvertenze precisano inoltre: «Nel presentare argomenti tradizionali di algebra è opportuno evitare di dare carattere di teoria ad argomenti che si riducono a semplici artifizi, e di fornire classificazioni e regole distinte in situazioni in cui valgono gli stessi principi generali». Concordiamo pienamente; abbiamo in mente molta manualistica in cui si fa un deprecabile spreco di spazio per cose inutili, insistendo su quelli che qui vengono designati come «artifizi»; e dobbiamo tristemente constatare che da molti insegnanti l'abilità nell'uso di questi artifizi viene spesso scambiata per apprendimento dei concetti fondamentali della matematica.

6. Il Tema 3 viene sviluppato con i seguenti sottotitoli: 3.1) Insiemi ed operazioni su di essi. 3.2) Prodotto cartesiano. Relazioni binarie: relazioni d'ordine e di equivalenza. Applicazioni (funzioni). 3.3) Funzioni $x \rightarrow ax+b$, $x \rightarrow ax^2+bx+c$, $x \rightarrow a/x$ e loro grafici.
Ci pare interessante osservare che le avvertenze aggiungono e precisano che il docente dovrebbe «riorganizzare» le conoscenze sugli insiemi che gli studenti già posseggono dalla scuola media, e dovrà collegare le nozioni logiche con quelle insiemistiche. Inoltre, dalle conoscenze sulle proprietà formali degli insiemi numerici dovrà costruire la nozione di gruppo e di relazione di ordine. Infine si dice che, con la rappresentazione grafica delle funzioni, non sarà necessario attendere le nozioni di calcolo differenziale per avere un'idea qualitativa dell'andamento di funzioni semplici. Ed infine si osserva che «... in questo contesto l'impiego del calcolatore potrà essere importante, purché lo studente abbia la consapevolezza del carattere approssimato delle rappresentazioni ottenute». Queste parole ci sembrano molto importanti, soprattutto in relazione a ciò che abbiamo detto sopra a proposito del computer considerato come feticcio; pensiamo infatti che esse possano dare inizio (finalmente) ad un impiego ragionevole ed intelligente del computer per l'insegnamento della matematica. Impiego che non è stato certo facilitato dalla campagna per l'informatizzazione di cui abbiamo detto, e che è ancora oggi abbastanza lontano dalla pratica di troppi insegnanti.
Il nostro timore è che l'enumerazione delle tre funzioni, fatta sopra, rafforzi la pratica didattica che conduce purtroppo ad identificare la parabola come il diagramma del polinomio quadratico, e l'iperbole equilatera come il diagramma della funzione a/x.

Cartesio (1596-1650) in un'incisione di C. Hellemans. Parigi, Bibliothèque Nationale.

7. Il Tema 4 viene esplicitato con i seguenti sottotitoli: 4.1) Semplici spazi di probabilità: eventi aleatori, eventi disgiunti e «regola della somma». 4.2) Probabilità condizionata, probabilità composta. Eventi indipendenti e «regola del prodotto». 4.3) Elementi di statistica descrittiva: rilevazione di dati, valori di sintesi, indici di variabilità.
I programmi proseguono affermando che: «... lo studio della probabilità tende da un lato a sviluppare un corretto approccio all'analisi di situazioni in condizioni di incertezza, fornendo strumenti per trattare razionalmente le proprie informazioni e assumere decisioni coerenti, dall'altro a fornire nuovi ambiti in cui è possibile sviluppare interessanti esempi di matematizzazione».
E poi si prosegue dicendo che «... per il consolidamento di una mentalità probabilistica, che orienti lo studente anche nei giudizi della vita corrente, sono essenziali un avvio ragionato alle varie definizioni di probabilità ed una ricca esemplificazione tratta da situazioni reali».
Vorremmo sperare che la manualistica corrente tenga presente queste raccomandazioni, perché ci è capitato di leggere troppi capitoli di sedicente calcolo delle probabilità nei quali è data esclusivamente la definizione frequentistica di probabilità, e gli esercizi si limitano a essere semplicemente delle esercitazioni di combinatoria, a livello elementare.
Inoltre non riusciamo a capire la ragione per la quale si parla di «regola della somma» e di «regola del prodotto» in relazione a proposizioni che possono essere rigorosamente dimostrate, ovviamente premettendo un sistema coerente e completo di assiomi. Temiamo che con queste denominazioni lo studente sia indotto a pensare al calcolo delle probabilità come ad un insieme di regole pratiche fondate soltanto sulla riuscita a posteriori delle loro applicazioni.
Per quanto riguarda la statistica si legge che «... i contenuti [...] costituiscono l'occasione per una messa a punto più rigorosa e formalizzata di concetti e strumenti in parte già conosciuti, suggerendo una più consolidata familiarizzazione attraverso applicazioni a problemi e contesti di tipo interdisciplinare».
Anche nel caso della statistica vorremmo esprimere la speranza che la manualistica e l'insegnamento non si limitino ad una vacua elencazione di medie, ma presentino in modo chiaro le tecniche statistiche come procedure dirette a raccogliere razionalmente le informazioni, per elaborarle in vista di decisioni da prendere in condizioni di informazione incompleta.

8. Il Tema 5 viene espliciltato con i seguenti sottotitoli: 5.1) Logica delle proposizioni: proposizioni elementari e connettivi, valore di verità di una proposizione composta. Inferenza logica, principali regole di deduzione. 5.2) Variabili, predicati, quantificatori. 5.3) Analisi, organizzazione e rappresentazione di dati, costruzione strutturata di algoritmi e loro rappresentazione. 5.4) Sintassi e semantica. Prima introduzione dei linguaggi formali.
I programmi proseguono avvertendo che «Gli elementi di logica non devono essere visti come una premessa metodologica all'attività dimostrativa, ma come una riflessione che si sviluppa man mano che matura l'esperienza matematica dello studente. Fin dall'inizio bisogna abituare lo studente all'uso appropriato del linguaggio e delle formalizzazioni, a esprimere correttamente le proposizioni matematiche e a concatenarle in modo coerente per dimostrare teoremi, mentre solo nella fase terminale del biennio si può pervenire allo studio esplicito delle regole di deduzione».
Pare a noi che queste parole confermino il nostro parere sul valore formativo della matematica, materia che dovrebbe offrire l'occasione alla chiarezza espressiva, ed al rigore deduttivo. Ed a questo scopo osiamo ripetere che la geometria ci pare una palestra insostituibile.
Vorremmo tuttavia osservare che anche l'argomento della logica formale simbolizzata può offrire all'insegnante colto e volonteroso una occasione ottima per raggiungere quell'obiettivo che è stato enunciato con le parole: «... inquadrare storicamente qualche momento significativo dell'evoluzione del pensiero matematico». Infatti spesso nella manualistica di logica simbolica certi argomenti vengono presentati e trattati con un atteggiamento abbastanza antistorico, quasi che il ragionamento chiaro e rigoroso non sia stato mai conosciuto, in tutti i secoli che vanno da Euclide a Boole, e quasi che ogni ragionamento fondato e rigoroso debba necessariamente essere presentato in termini di logica formalizzata.
Invece, a nostro parere, l'invenzione dei metodi di logica simbolica costituisce un episodio importante ed interessante dell'evoluzione del pensiero matematico; evoluzione che ha avuto il suo momento principale nella ricerca del rigore nell'analisi matematica e nella problematica dei fondamenti dell'aritmetica e della geometria.

9. Ci pare chiaro che la pratica dell'insegnamento non necessariamente dovrà seguire la successione degli argomenti, così come si trovano elencati nel documento che abbiamo sommariamente analizzato. Anzi ci pare chiaro che l'insegnante colto ed attivo debba costruire la propria opera didattica procedendo per così dire «in parallelo» il più possibile; in particolare traendo da alcuni capitoli i contenuti che giustificano le strutture teoriche. Anzi in questo campo, sarebbe augurabile che gli insegnanti abbiano la cultura sufficiente per illustrare la nascita e l'evoluzione storica delle varie teorie con la necessità di risolvere certi problemi e di dare certe risposte che via via venivano formulate.
Dobbiamo purtroppo constatare che la nostra Università ammanisce degli insegnamenti specialistici ad alto livello, ma forse non prepara in modo sufficiente gli insegnanti futuri a quest'opera di sintesi e di valutazione storica, che dovrebbe far parte di quell'aspetto formativo della matematica di cui abbiamo detto ripetutamente.

Carlo Felice Manara
Università statale di Milano
Mario Marchi
Università Cattolica di Brescia